中原工学院
Zhongyuan University of Technology

7　气体动理论

任课教师　曾灏宪

中原工学院　理学院

要求

- 能将分子平均平动动能与温度联系起来
- 会计算气体分子的自由度
- 会根据自由度计算气体的内能
- 理解麦克斯韦速率分布律的含义
- 熟记三种常用的统计速率公式并会用它们解释热学现象

大学物理（上）

7　气体动理论

7.5 能量均分定理　理想气体的内能

一　能量均分定理（玻尔兹曼假设）

$$\because \bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$\therefore \frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_y^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_z^2} = \frac{1}{2} kT$$

——每个平动自由度的动能为 $kT/2$

由于任一运动形式（包括平动、转动、振动）的机会均等，气体分子任一自由度的平均动能都等于 $kT/2$

——能量按自由度均分定理

分子的平均动能 $\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT}$

二 自由度

➢ 自由度

– 确定一个物体在空间的位置所需的独立坐标的数目

– 反映了运动的自由程度

1. 质点平动的自由度（自由度数目 ***t***）

直线运动、平面运动、空间运动　需要的坐标数目？

→分别是 1、2、3 个自由度

分子动能 ＝ 平动动能 + 转动动能 + 振动动能

2. 刚体运动的自由度　　　　刚体怎么运动？

平动 + 转动

✓ 平动

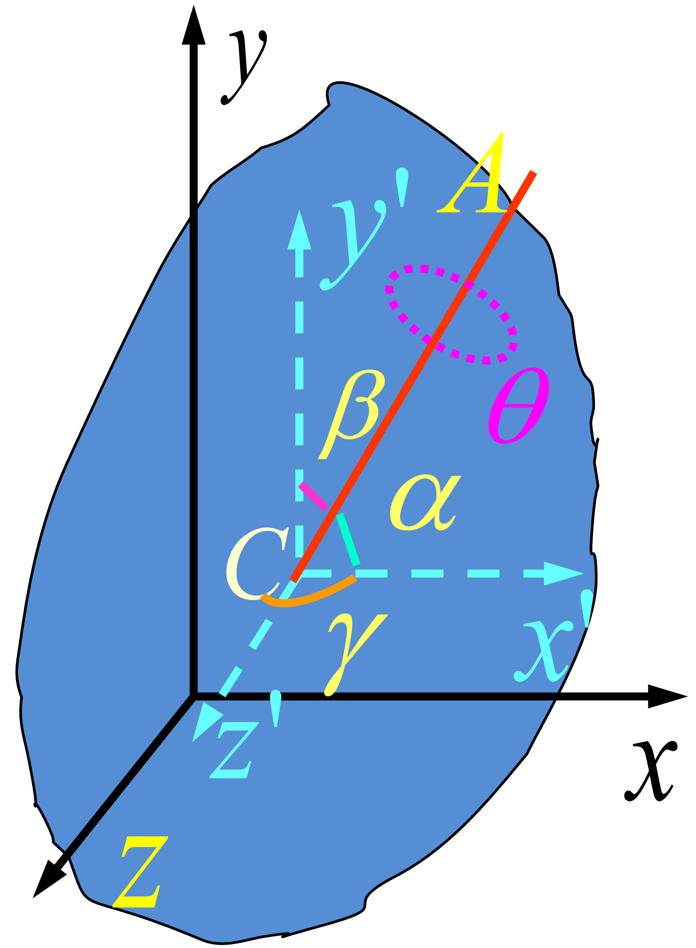
- 考虑质心 C 的运动
- 与质点平动一样，3 个

✓ 转动（自由度数目 r）

- 转轴 CA 的方位　　怎么确定？
- 用方位角确定：α、β、γ
- 其中只有 2 个是独立的

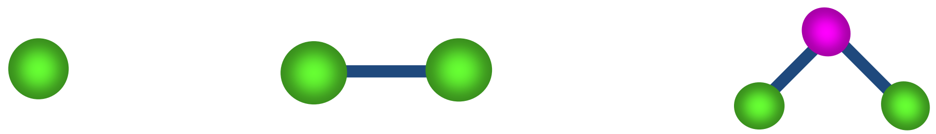
还有吗？

- 刚体相对此轴的角度（自转）



3. 振动的自由度（自由度数目 v）

✓ 表现为非刚性物体中各部分之间相对位置的变化



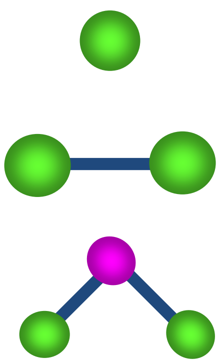
✓ 与物体本身的性质有关，比如刚体，振动自由度为 0

✓ 数值上表现为坐标的 2 次方项，如 $\frac{1}{2}kx^2$

4. 气体分子的自由度

- ✓ 自由度数目：$\boldsymbol{i = t + r + v}$
- ✓ 常温下可不考虑分子的振动

刚性分子自由度



自由度 / 分子	t 平动	r 转动	i 总
单原子分子	3	0	3
双原子分子	3	2	5
多原子分子	3	3	6

三　理想气体的内能

气体内能 ＝ 分子动能 ＋ 分子间相互作用势能

对理想气体，可忽略分子间的相互作用力，即可忽略相互作用势能

✓ 1 mol 理想气体的内能　$\boxed{E = N_{\mathrm{A}}\bar{\varepsilon} = N_A \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}RT}$

✓ $\frac{m'}{M}$ mol 理想气体的内能　$E = \frac{m'}{M}\frac{i}{2}RT = \nu\frac{i}{2}RT$

$\boxed{\text{理想气体内能只是温度的函数，和 } T \text{ 成正比.}}$

理想气体内能增量　$\mathrm{d}E = \nu\frac{i}{2}R\mathrm{d}T$

几种刚性分子理想气体的内能

1mol 单原子分子气体 $E=\dfrac{3}{2}RT$

1mol 双原子分子气体 $E=\dfrac{5}{2}RT$

1mol 三（多）原子分子气体 $E=3RT$

讨论： 指出下列各量的物理意义

$\frac{1}{2}kT$：平衡态下，物质分子每个自由度上的平均动能

$\frac{3}{2}kT$：平衡态下，物质分子的平均平动动能

$\frac{i}{2}kT$：平衡态下，物质分子的平均总动能

$\frac{i}{2}RT$：平衡态下，1mol 理想气体内能

$\nu\frac{i}{2}RT$：平衡态下，νmol 理想气体内能

例 两种气体自由度数目不同，温度相同，摩尔数相同，下面哪种叙述正确：

（A）它们的平均平动动能、平均动能、内能都相同；

（B）它们的平均平动动能、平均动能、内能都不同；

（C）它们的平均平动动能相同，而平均动能和内能不同；

（D）它们的内能相同，而平均平动动能和平均动能都不相同；

例 设有一恒温容器，其内储有某种理想气体，若容器发生缓慢漏气，问

(1) 气体的压强是否变化？

(2) 容器内气体分子的平均平动动能是否变化？

(3) 气体的内能是否变化？

例：在一个以匀速率 v 运动的容器中，盛有分子质量为 m 的某种单原子理想气体，若使容器突然停止运动，则气体状态达到平衡后，其温度的增量 $\Delta T = ?$

大学物理（上）

7　气体动理论

7.6 麦克斯韦气体分子速率分布律

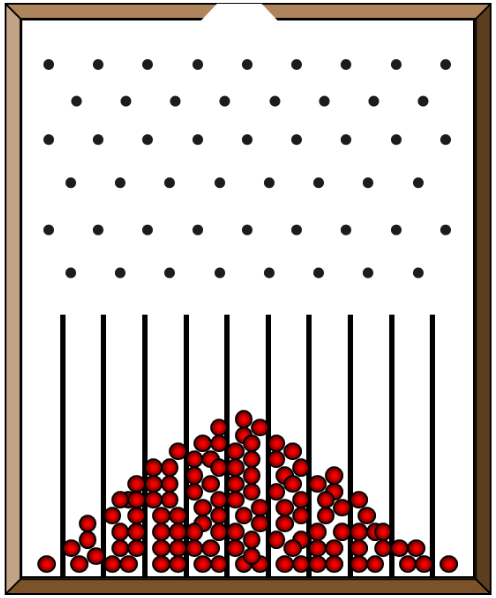
一　麦克斯韦气体分子速率分布函数

速率分布律　不管分子运动速度的方向如何，只考虑分子按速度大小（速率）的分布的规律.

ΔN -- 速率在 $v \rightarrow v+\Delta v$ 区间的分子数.

$\frac{\Delta N}{N}$ -- 速率在 $v \rightarrow v+\Delta v$ 区间的分子数占总数的百分比 .

$\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}=f(v)$ -- **速率分布函数**：速率在 v 附近单位速率区间内的分子数占总分子数的百分比 —— 反映分子速率分布在 v 附近单位速率区间内的概率大小

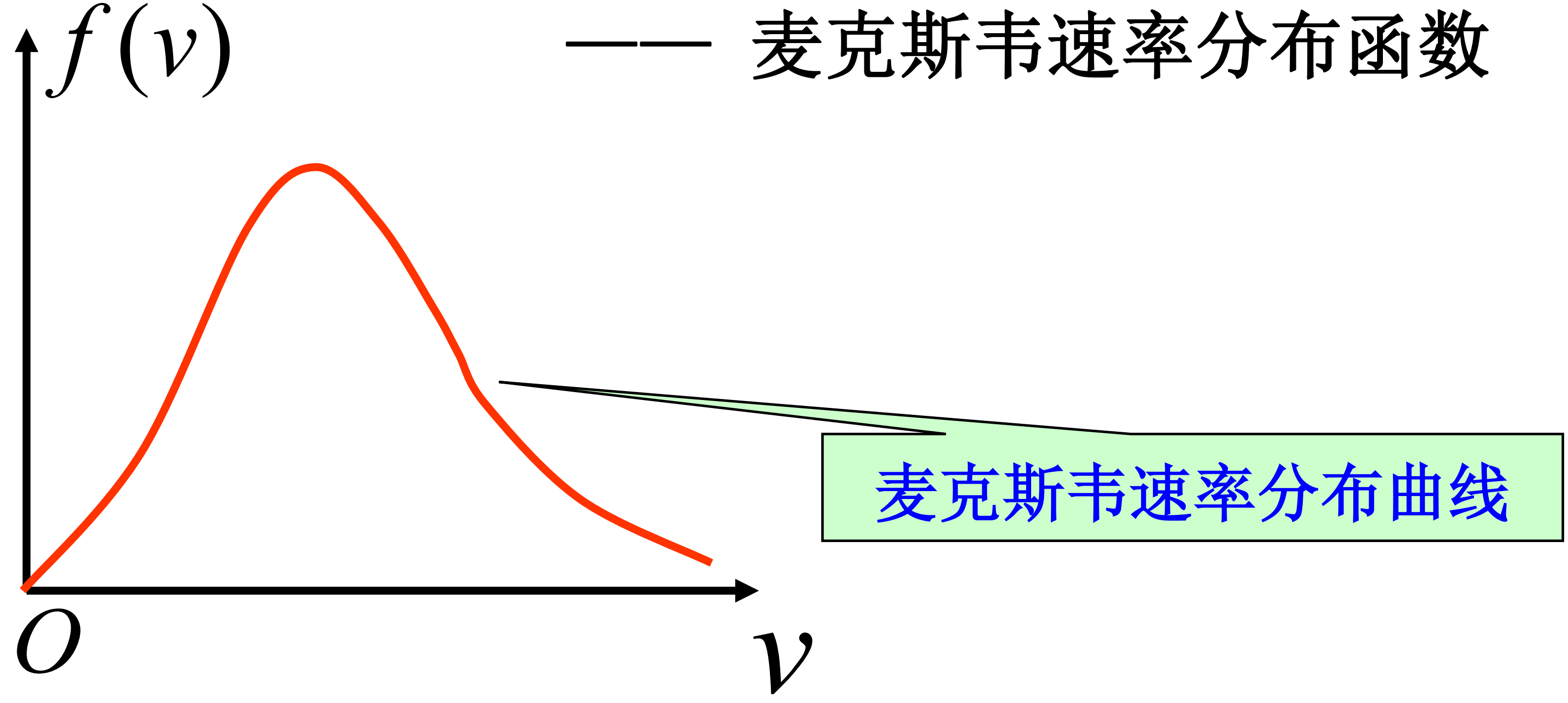


伽尔顿板

1859年麦克斯韦从理论上导出平衡状态下气体分子速率分布函数

$$\boxed{f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2}$$

$f(v)$ —— 麦克斯韦速率分布函数



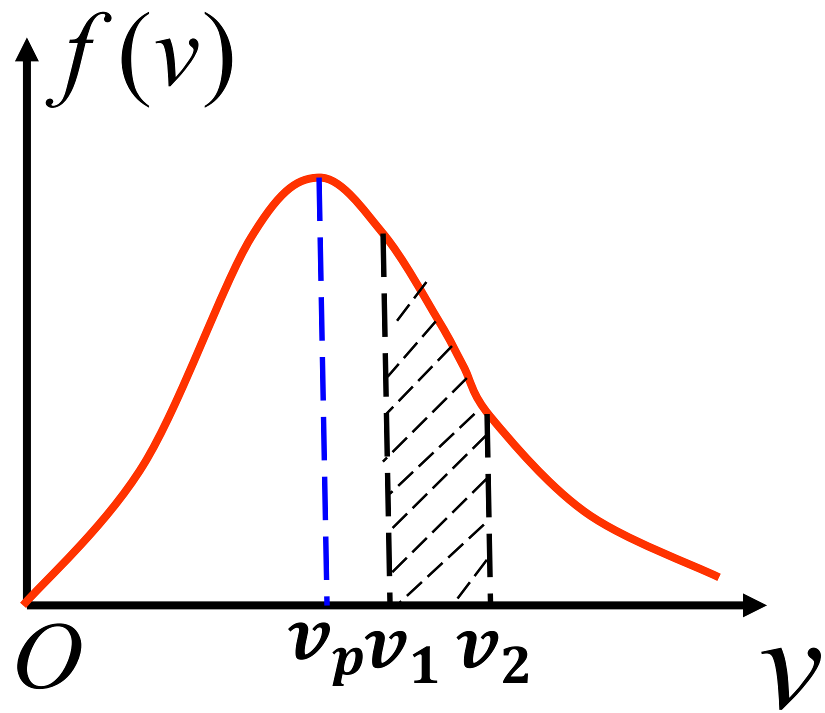
说明：

$$\frac{dN}{Ndv}=f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2$$

1. 速率范围：**0~∞**
2. 最概然速率 v_p
3. $v_1 \sim v_2$ 范围内的分子数目占分子总数的百分比（阴影下面积）

$$\frac{\Delta N}{N}=\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv$$

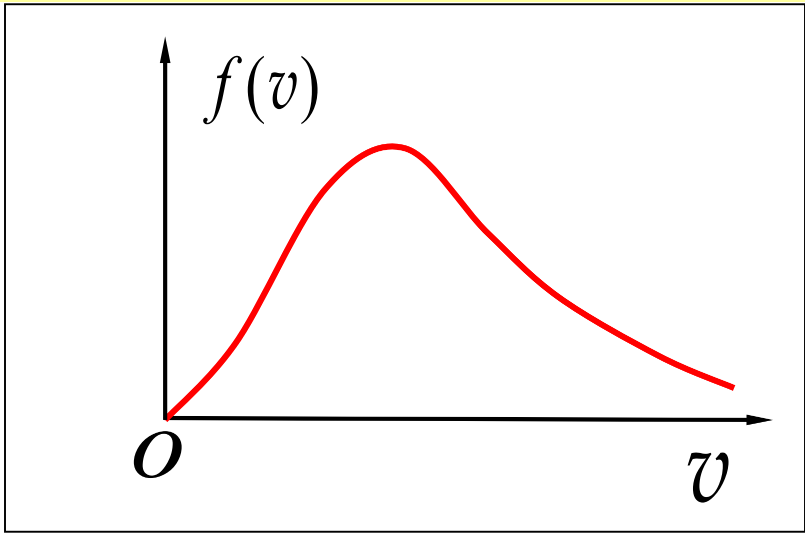
4. 同一气体不同温度下的速率分布曲线：T 高时，v_p 也高



二 三种统计速率

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2$$

- 最概然速率 v_p
  - 与 $f(v)$ 的极大值对应的速率
  - 又叫最可几速率

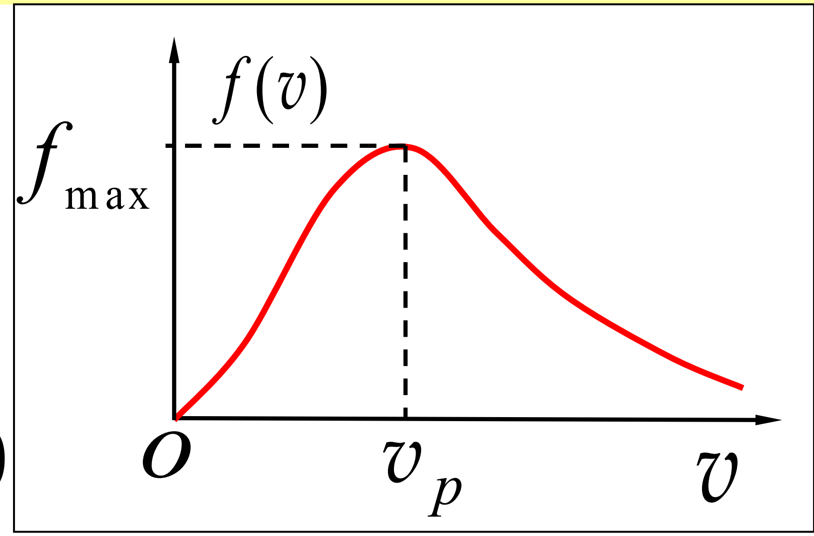


- 平均速率 $\overline{v}$
- 方均根速率 v_{rms}
  - $v_{rms}=\sqrt{\overline{v^2}}$

1. 最概然速率 v_p

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2$$

– 与 ***f(v)*** 的极大值对应的速率



令 $\dfrac{df(v)}{dv}=0$ ，即

$$4\pi(b/\pi)^{3/2}(2ve^{-bv^2}-v^2\cdot b2ve^{-bv^2})=0$$

$$\therefore\quad v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}\approx 1.41\sqrt{\frac{RT}{M}}$$ ★

物理意义：若将 v 分为无数相等的速率间隔 dv，则在包含 v_p 的间隔中的分子数占比最大。

练习：

麦克斯韦速率分布中最概然速率 v_p 的概念下面哪种表述正确？

（**A**）v_{p} 是气体分子中大部分分子所具有的速率.

（**B**）v_{p} 是速率最大的速度值.

（**C**）v_{p} 是麦克斯韦速率分布函数的最大值.

（**D**）速率大小与最概然速率相近的气体分子的比率最大.

2. 平均速率 $\overline{v}$

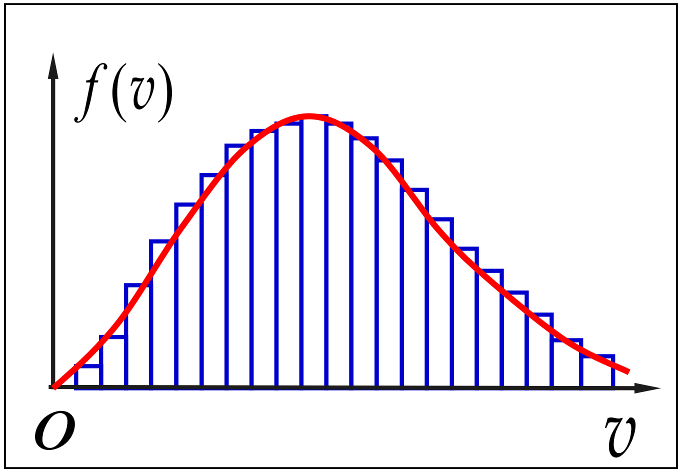
$$\overline{v}=\frac{v_1 \mathrm{d}N_1+v_2 \mathrm{d}N_2+\cdots+v_i \mathrm{d}N_i+\cdots+v_n \mathrm{d}N_n}{N}$$

$$=\frac{\int_0^N v \mathrm{d}N}{N}=\frac{\int_0^{\infty} v N f(v) \mathrm{d}v}{N}$$

$$=\int_0^{\infty} v f(v) \mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{\infty} v 4\pi\left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-b v^2} v^2 \mathrm{d}v$$

$$=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

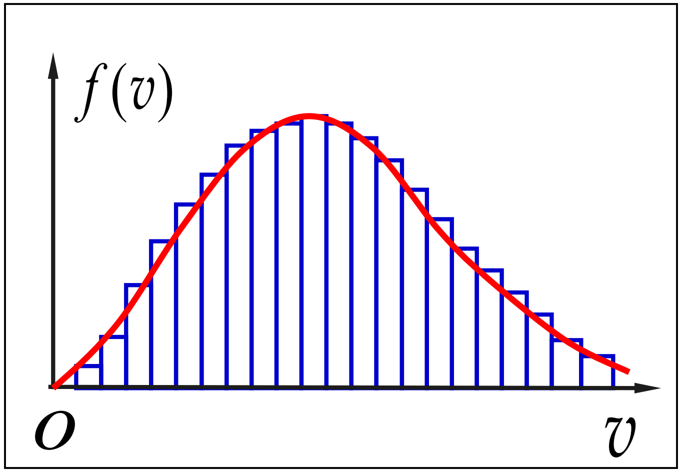


★

$$\boxed{\overline{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\approx 1.60\sqrt{\frac{RT}{M}}}$$

3. 方均根速率 v_{rms} $(\sqrt{\overline{v^2}})$

- $\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v)\,\mathrm{d}v$



- 但是,

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$$

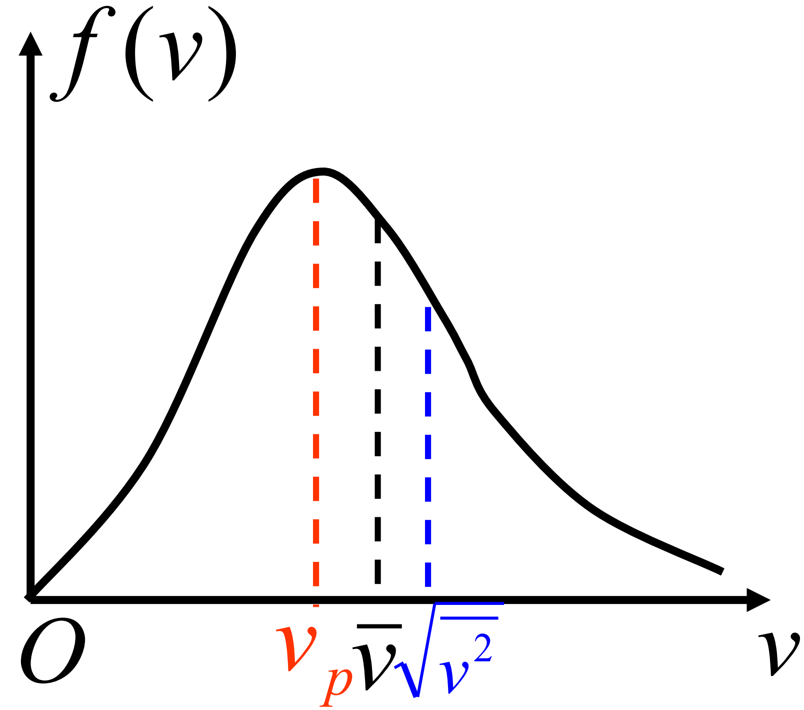
$$\boxed{v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}}$$ ★

三种速率的关系

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \approx 1.60\sqrt{\frac{RT}{M}}$$

$$v_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$



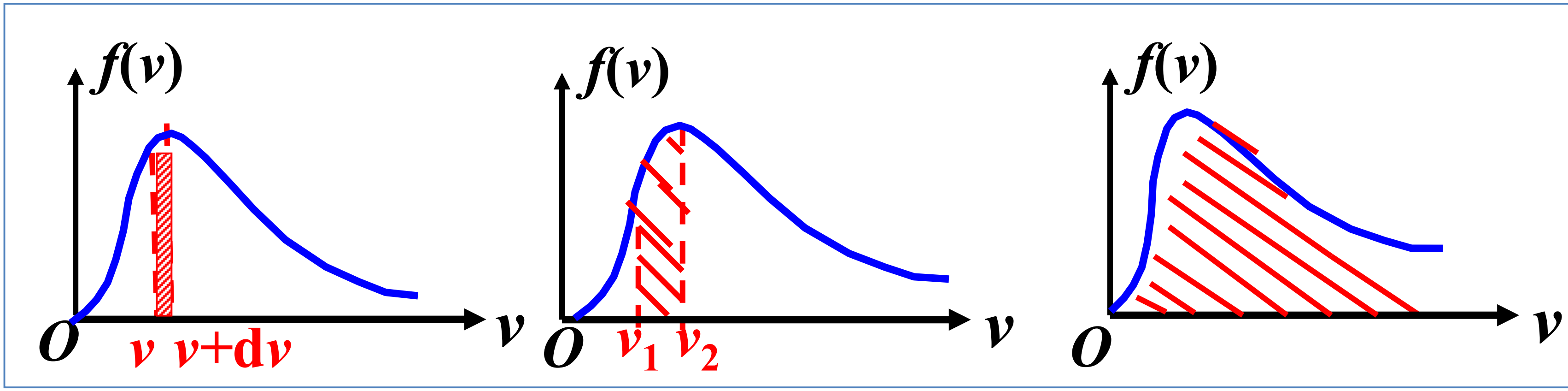
$$v_p < \bar{v} < \sqrt{\overline{v^2}}$$

注意：1. 三种速率都只具有统计意义。

2. 三种速率有不同的应用，可分别用于计算平均平动动能、平均自由程和分子的平均碰撞次数，以及比较不同气体或不同温度时的分子速率分布曲线。

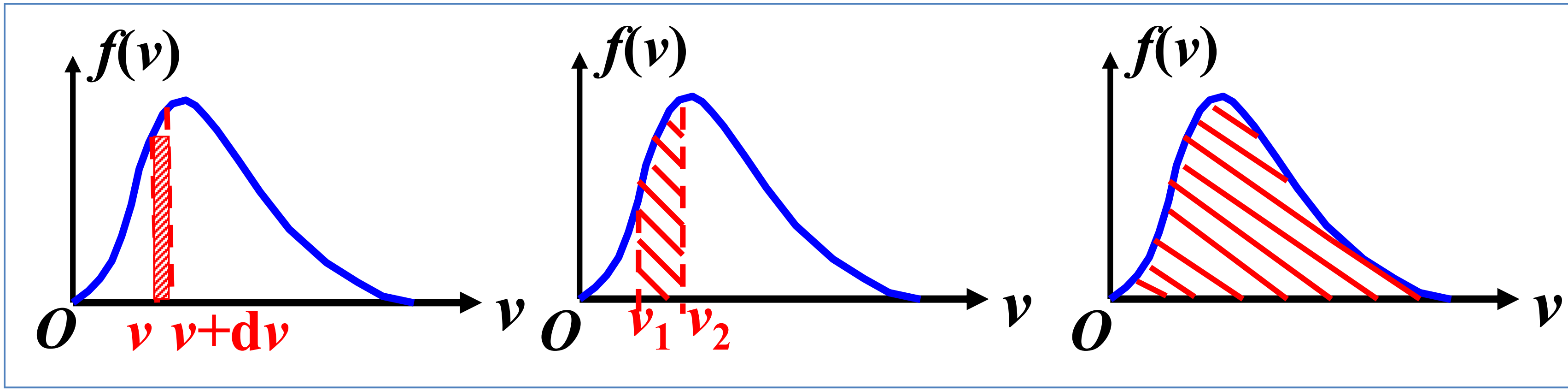
三 推广与应用

讨论： 1) 曲线下的面积



窄条：$f(v)\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}\cdot \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}N}{N}$ 分子速率在 v—$v+\mathrm{d}v$ 区间内的分子数占总分子数的比率

部分：$\displaystyle\int_{v_1}^{v_2} f(v)\mathrm{d}v = \frac{\int_{v_1}^{v_2}\mathrm{d}N}{N} = \frac{N_{v_1\to v_2}}{N}$ 分子速率在 v_1—v_2 区间内的分子数占总分子数的比率



总面积：$\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v = \dfrac{\int_0^{\infty}\mathrm{d}N}{N} = \dfrac{N}{N} = 1$　　归一化条件

练习：

$Nf(v)\mathrm{d}v \quad nf(v)\mathrm{d}v$

$\int_{v_p}^{\infty} f(v)\mathrm{d}v \quad \int_0^{v_p} Nf(v)\mathrm{d}v$

的物理意义?

- $Nf(v)dv$：

v 附近 $v \to v + dv$ 速率间隔内的分子数

- $nf(v)dv$：

单位体积内，处于 v 附近 $v \to v + dv$ 速率间隔内的分子数

- $\int_{v_p}^{\infty} f(v)dv$：

分子速率在 $v_p \to \infty$ 速率区间的分子数占总分子数的比率

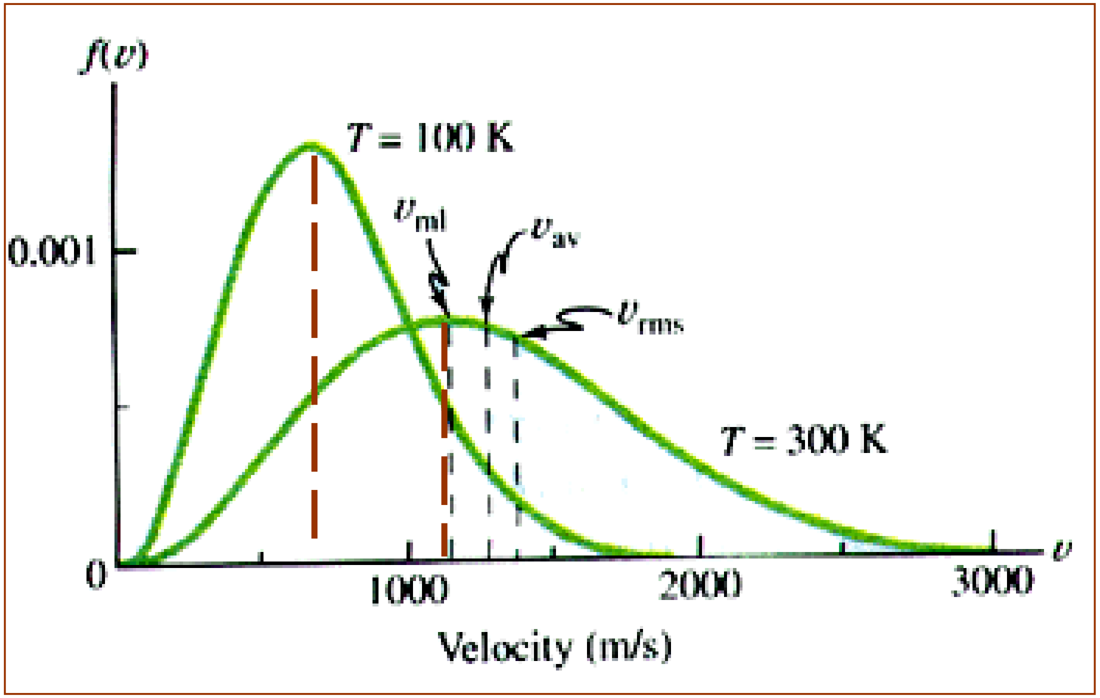
- $\int_{0}^{v_p} Nf(v)dv$：

分子速率在 $0 \to v_p$ 速率区间的分子数

讨论： 2) 分布曲线随 m ,T 变化

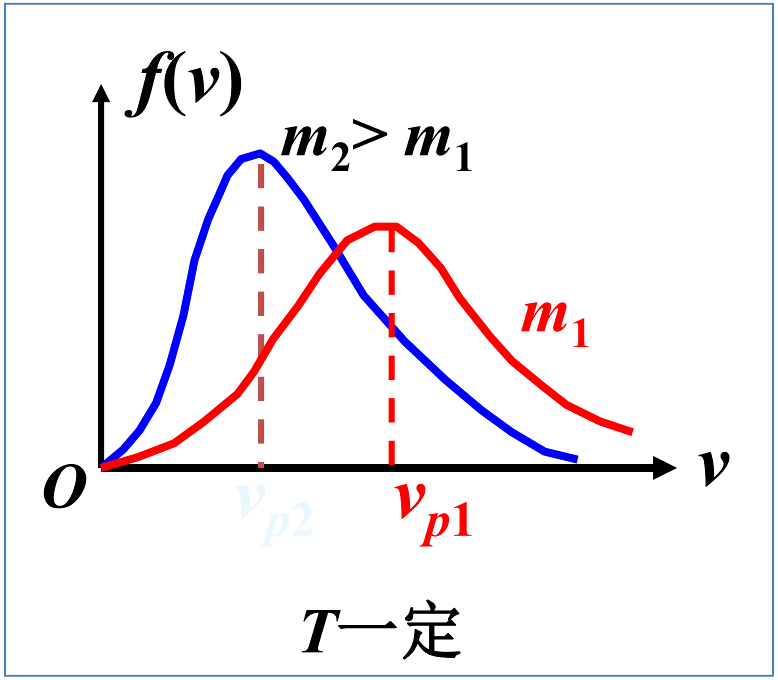
m 一定， $T\uparrow$ $v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}\uparrow$

曲线峰值右移，(总面积不变)曲线变平坦

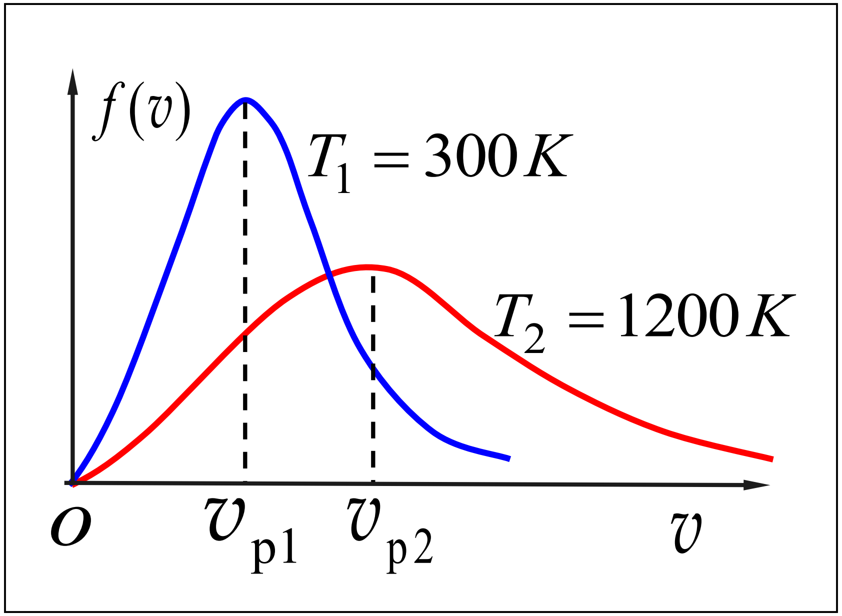


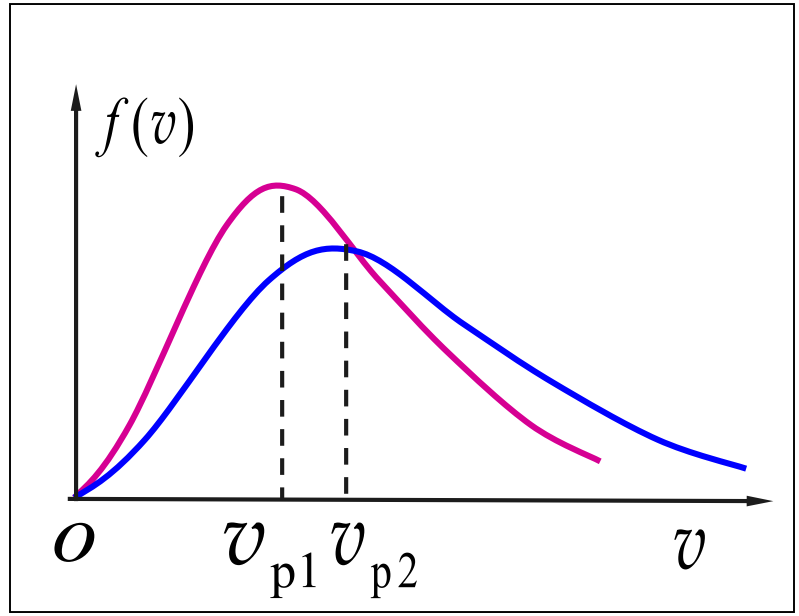
T 一定， $m\uparrow$ $v_p=\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}\downarrow$

曲线峰值左移，（总面积不变）曲线变尖锐。



$$v_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \qquad \overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \qquad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

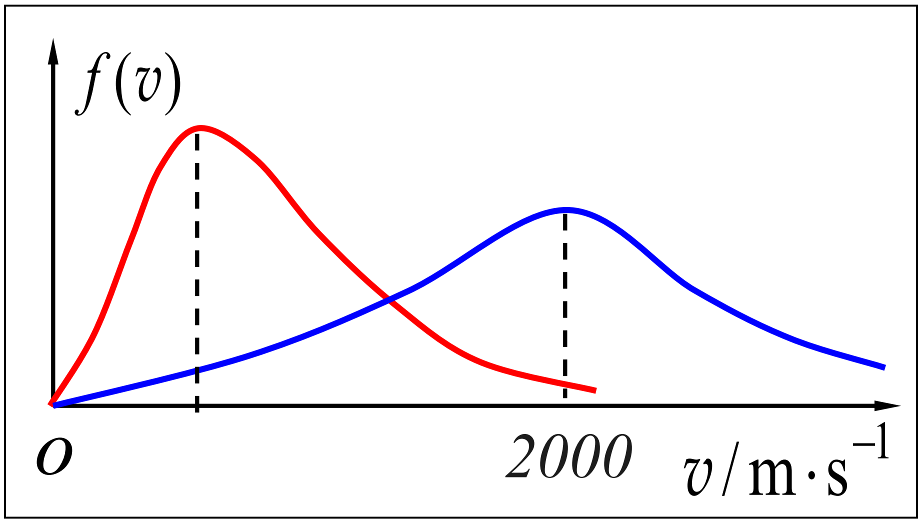




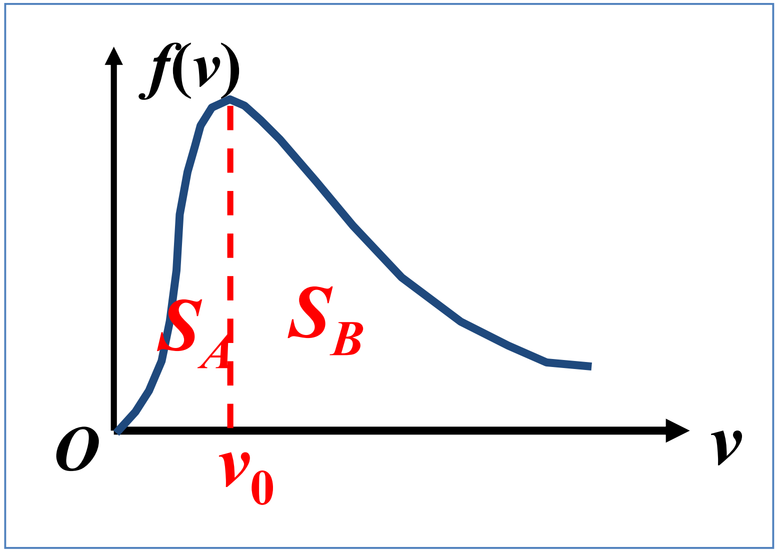
N_2分子在300K和1200K下的速率分布，怎么对应？

同一温度下O_2和H_2的速率分布，如何对应？

例 如图示两条 $f(v) \sim v$ 曲线分别表示氢气和氧气在同一温度下的麦克斯韦速率分布曲线，从图上数据求出氢气和氧气的最可几速率。



练习： (1)若面积 $S_A = S_B$， 则下列答案中正确的是



① $v_0 = \bar{v}$

② $v_0 = v_p$

③ $v_0 = \sqrt{\overline{v^2}}$

④ $N_{0—v_0} = N_{v_0—\infty} = \frac{1}{2}N$

作业

- P206：12

版权声明